

せん断応力場におけるだ円形介在物の干渉効果の解析*
(体積力法の特異積分方程式の数値解析法)野田 尚 昭*¹, 松尾 忠 利*²Analysis of Interaction between Elliptical Inclusions in a Shear Stress Field
(Numerical Solution of the Singular Integral Equation of the Body Force Method)

Nao-Aki NODA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations of the body force method in interaction problems of elliptical holes and elliptical inclusions in a shear stress field. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the densities of body forces distributed in the x - and y -directions of infinite plates having the same elastic constants of the matrix and of the inclusions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used; then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The accuracy of the present analysis is verified by comparison with the results obtained by the previous research. The present method is found to give rapidly converging numerical results for stress distribution along the boundaries of both the matrix and the inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Inclusion

1. 緒 言

切欠きや穴が2個以上存在するときには、切欠きや穴が単独に存在する場合とは異なる値の応力集中を生ずる。この切欠きの干渉効果に関する研究はこれまでも数多く発表されている。西谷は切欠きや穴が単独に存在する場合の付加応力場の考え方を基にした干渉効果の近似計算法を提案して⁽¹⁾、その後体積力法の開発⁽²⁾に結びつけている。これらの近似計算法や体積力法による解析では引張応力場における干渉問題を主として取扱っている。1個のだ円孔を有する無限板の純粋せん断の場合の体積力の基本密度関数(厳密解)は文献に与えられている⁽³⁾が、せん断応力場における具体的干渉問題への体積力法の適用はこれまでのところなされていない。また、これまで、せん断応力場における穴などの干渉効果を考察した研究は一般に少ない。

著者らはこれまでに、体積力法を用いた応力集中問題の解析において、特異積分方程式を厳密に解析する

方法を提案した^{(4)~(7)}。また、前報⁽⁸⁾では、この方法を応用して、無限板中で一様な引張応力を受ける二つのだ円形介在物の干渉問題の解析を行った。そこで、本報では、引張応力以外の荷重条件のもとで、介在物の応力集中の干渉効果を考察し、さらに、これまで著者らの用いてきた解析方法の有用性を確認するため、せん断応力場における介在物の干渉問題を解析する。また、これまでの研究では、円孔の場合⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾以外に詳しい解析例は見当たらないので、だ円孔の干渉問題につ

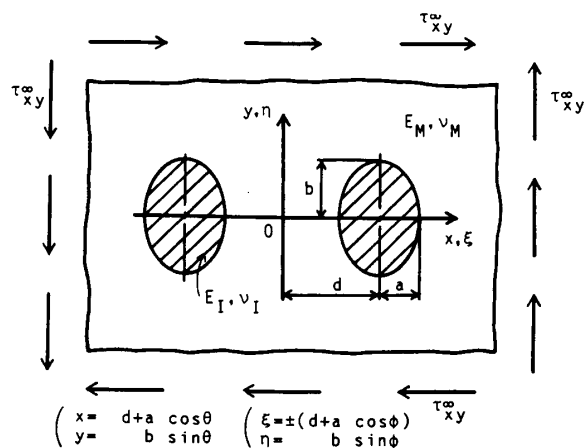


図1 無限板中の二つのだ円形介在物

* 平成5年11月15日 材料力学講演会、平成6年3月31日 第71期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成6年1月28日。

*¹ 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 正員、九州工業大学大学院。

いても考察を行う。解析では、さきに定義した 8 種類の基本密度関数⁽⁵⁾をせん断応力場の問題に適用する。介在物間の距離および、母材と介在物の弾性比を変化させて干渉効果を系統的に調べる。本論文の方法によれば、母材と介在物の境界上の任意の点の応力を正確に求めることが可能である。

2. 特異積分方程式による 介在物問題の解析法

本解析方法を図 1 に示すような、遠方で一様なせん断応力 τ_{xy}^∞ が作用している無限板中の大きさの等しい 2 個のだ円形介在物の干渉問題を例にとって説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法

の考え方により、無限板中の 2 点 $[\xi = \pm(d + a \cos \phi), \eta = b \sin \phi]$ に y 軸に関して逆対称に 2 個の集中力が働くときの任意の点 $(x = d + a \cos \theta, y = b \sin \theta)$ の応力の解 $(K_{nn}^{Fx}, K_{nn}^{Fy}, K_{ni}^{Fx}, K_{ni}^{Fy})$ と変位の解 $(K_{ui}^{Fx}, K_{ui}^{Fy}, K_{vi}^{Fx}, K_{vi}^{Fy})$ を用いて解くことができる。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数をもつ無限板(無限板 M と無限板 I)中の仮想境界上に分布させた x, y 方向の、境界に沿った長さ当たりの体積力密度 $\rho_{xM}^*(\phi), \rho_{yM}^*(\phi)$ および $\rho_{xI}^*(\phi), \rho_{yI}^*(\phi)$ を未知関数とする特異積分方程式(1), (2)で表現される $[\phi$ は着力点 (ξ, η) を表す角度で注目点 θ と区別して用いる]。

$$\begin{aligned} & -(1/2)\{\rho_{xM}^*(\theta) \cos \theta_o + \rho_{yM}^*(\theta) \sin \theta_o\} + (1/2)\{\rho_{xI}^*(\theta) \cos \theta_o + \rho_{yI}^*(\theta) \sin \theta_o\} + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xM}^*(\phi) ds \\ & + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yM}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yI}^*(\phi) ds \\ & = -2\tau_{xy}^\infty \sin \theta_o \cos \theta_o \\ & -(1/2)\{-\rho_{xM}^*(\theta) \sin \theta_o + \rho_{yM}^*(\theta) \cos \theta_o\} + (1/2)\{-\rho_{xI}^*(\theta) \sin \theta_o + \rho_{yI}^*(\theta) \cos \theta_o\} \\ & + \int_0^{2\pi} K_{niM}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{niM}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yM}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{niI}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xI}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{niI}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yI}^*(\phi) ds = -\tau_{xy}^\infty (\cos^2 \theta_o - \sin^2 \theta_o) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yM}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xI}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yI}^*(\phi) ds \\ & = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^\infty y / E_M \\ & \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xM}^*(\phi) ds + \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yM}^*(\phi) ds - \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fx}(\phi, \theta) \rho_{xI}^*(\phi) ds \\ & - \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fy}(\phi, \theta) \rho_{yI}^*(\phi) ds = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^\infty x / E_M \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$-d\xi = a \sin \phi d\phi, \quad d\eta = b \cos \phi d\phi, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。また、 θ_o は点 (x, y) におけるだ円の外向き法線と x 軸のなす角度である。

無限板 M のだ円孔となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nM}, \tau_{ntM}, U_M, V_M$ とし、無限板 I のだ円形介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nI}, \tau_{ntI}, U_I, V_I$ とすると、式(1), (2)は母材と介在物の接合境界上における、境界条件 $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{ntM} - \tau_{ntI} = 0, U_M - U_I = 0, V_M - V_I = 0$ に相当している。式(1)の第 1 項と第 2 項は、体積力を無限小近傍からなる境界上⁽²⁾に作用させたとき、境界条件を満たすべき境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nnM}^{Fx}(\phi, \theta)$ を例にとると、これは、無限板 M の仮想境界上の y 軸に対称な 2 点に x 方向の集中力が y 軸に逆対称に作用するとき境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_n を意味する。 $K_{nnM}^{Fx}(\phi, \theta)$ 等の計算では、介在物の外部領域のある点(参考点)に対する相対変位を用いた⁽³⁾。式(1)はコーシー形⁽³⁾、式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\theta = \phi$ の場合には、式(1)は積分のコーシーの主値を取るものとする。

前報⁽⁵⁾において、 x 方向の体積力について 4 種類の基本密度関数 $w_{x1}(\phi), \dots, w_{x4}(\phi)$ および y 方向について 4 種類の体積力の基本密度関数 $w_{y1}(\phi), \dots, w_{y4}(\phi)$ を定義した。本解析法では、未知関数 $\rho_{xM}^*(\phi), \rho_{yM}^*(\phi)$ および $\rho_{xI}^*(\phi), \rho_{yI}^*(\phi)$ をこれらの基本密度関数と $0 \leq \phi \leq \pi/2$ で定義され、 $\phi = 0$ と $\pi/2$ に対称な関数 $\rho_{x1}(\phi), \dots, \rho_{y4}(\phi)$ の組合せによって表現する。この問題の x 軸に関する逆対称性より、基本密度関数として $w_{x2}(\phi), w_{x4}(\phi), w_{y1}(\phi), w_{y3}(\phi)$ を採用すれば、未知関数は次式で表現される。

$$\begin{aligned}\rho_{xM}^*(\phi) &= \rho_{x2M}(\phi)w_{x2}(\phi) + \rho_{x4M}(\phi)w_{x4}(\phi), \quad \rho_{yM}^*(\phi) = \rho_{y1M}(\phi)w_{y1}(\phi) + \rho_{y3M}(\phi)w_{y3}(\phi) \\ \rho_{xI}^*(\phi) &= \rho_{x2I}(\phi)w_{x2}(\phi) + \rho_{x4I}(\phi)w_{x4}(\phi), \quad \rho_{yI}^*(\phi) = \rho_{y1I}(\phi)w_{y1}(\phi) + \rho_{y3I}(\phi)w_{y3}(\phi)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、基本密度関数 $w_{x1}(\phi), w_{x2}(\phi), \dots, w_{y4}(\phi)$ は次式で定義される。

$$w_{x1}(\phi) = n_x(\phi)/\cos \phi, \quad w_{x2}(\phi) = n_x(\phi) \tan \phi, \quad w_{x3}(\phi) = n_x(\phi), \quad w_{x4}(\phi) = n_x(\phi) \sin \phi \quad \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$w_{y1}(\phi) = n_y(\phi)/\sin \phi, \quad w_{y2}(\phi) = n_y(\phi), \quad w_{y3}(\phi) = n_y(\phi) \cot \phi, \quad w_{y4}(\phi) = n_y(\phi) \cos \phi \quad \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

ここで、

$$n_x(\phi) = \frac{b \cos \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}, \quad n_y(\phi) = \frac{a \sin \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(4), (5)の表現を用いると式(1), (2)の特異積分方程式は次式で表現される。

$$\begin{aligned}& -(1/2)[\{\rho_{x2M}(\theta) \tan \theta + \rho_{x4M}(\theta) \sin \theta\} \cos^2 \theta_o + \{\rho_{y1M}(\theta)/\sin \theta + \rho_{y3M}(\theta) \cot \theta\} \sin^2 \theta_o] \\ & + (1/2)[\{\rho_{x2I}(\theta) \tan \theta + \rho_{x3I}(\theta) \sin \theta\} \cos^2 \theta_o + \{\rho_{y2I}(\theta)/\sin \theta + \rho_{y4I}(\theta) \cot \theta\} \sin^2 \theta_o] \\ & + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x2M}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3M}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{nnM}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2M}(\phi)/\sin \phi \\ & + \rho_{y4M}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x1I}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3I}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi \\ & - \int_0^{2\pi} K_{nnI}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2I}(\phi)/\sin \phi + \rho_{y4I}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi = -2\tau_{xy}^\infty \sin \theta_o \cos \theta_o \\ & -(1/2)[-\{\rho_{x2M}(\theta) \tan \theta + \rho_{x4M}(\theta) \sin \theta\} + \{\rho_{y1M}(\theta)/\sin \theta + \rho_{y3M}(\theta) \cot \theta\}] \sin \theta_o \cos \theta_o \\ & + (1/2)[\{\rho_{x1I}(\theta)/\cos \theta + \rho_{x3I}(\theta)\} + \{\rho_{y2I}(\theta)/\sin \theta + \rho_{y4I}(\theta) \cot \theta\}] \sin \theta_o \cos \theta_o \\ & + \int_0^{2\pi} K_{niM}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x2M}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3M}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{niM}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2M}(\phi)/\sin \phi \\ & + \rho_{y4M}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi - \int_0^{2\pi} K_{niI}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x1I}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3I}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi \\ & - \int_0^{2\pi} K_{niI}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2I}(\phi)/\sin \phi + \rho_{y4I}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi = -\tau_{xy}^\infty (\cos^2 \theta_o - \sin^2 \theta_o)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x2M}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3M}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2M}(\phi)/\sin \phi \\ & + \rho_{y4M}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi - \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x1I}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3I}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi \\ & - \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2I}(\phi)/\sin \phi + \rho_{y4I}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^\infty y/E_M \\ & \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x2M}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3M}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi + \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2M}(\phi)/\sin \phi \\ & + \rho_{y4M}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi - \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fx}(\phi, \theta) \{\rho_{x1I}(\phi) \tan \phi + \rho_{x3I}(\phi) \sin \phi\} b \cos \phi d\phi \\ & - \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fy}(\phi, \theta) \{\rho_{y2I}(\phi)/\sin \phi + \rho_{y4I}(\phi) \cot \phi\} a \sin \phi d\phi = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^\infty x/E_M\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (8)$$

本研究では、未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \rho_{x2M}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} a_{nM} t_n(\phi) \\ \rho_{x4M}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} b_{nM} t_n(\phi) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{y1M}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} c_{nM} t_n(\phi) \\ \rho_{y3M}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} d_{nM} t_n(\phi) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{x2I}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} a_{nI} t_n(\phi) \\ \rho_{x4I}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} b_{nI} t_n(\phi) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{y1I}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} c_{nI} t_n(\phi) \\ \rho_{y3I}(\phi) = \sum_{n=1}^{M/2} d_{nI} t_n(\phi) \end{array} \right\}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (9)$$

$$t_n(\phi) = \cos \{2(n-1)\phi\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで M は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により式(7), (8)の特異積分方程式は、式(11), (12)で示される $4M$ 元の連立方程式に還元される。

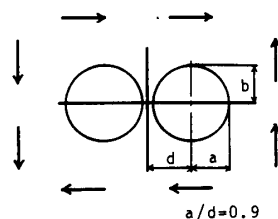
$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM}A_{nM} + b_{nM}B_{nM} + c_{nM}C_{nM} + d_{nM}D_{nM}) \\
& + a_{nI}A_{nI} + b_{nI}B_{nI} + c_{nI}C_{nI} + d_{nI}D_{nI}) \\
& = -2\tau_{xy}^{\infty} \sin \theta_o \cos \theta_o \\
& \sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM}E_{nM} + b_{nM}F_{nM} + c_{nM}G_{nM} + d_{nM}H_{nM}) \\
& + a_{nI}E_{nI} + b_{nI}F_{nI} + c_{nI}G_{nI} + d_{nI}H_{nI}) \\
& = -\tau_{xy}^{\infty} (\cos^2 \theta_o - \sin^2 \theta_o) \\
& \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM}I_{nM} + b_{nM}J_{nM} + c_{nM}K_{nM} + d_{nM}L_{nM}) \\
& + a_{nI}I_{nI} + b_{nI}J_{nI} + c_{nI}K_{nI} + d_{nI}L_{nI}) \\
& = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^{\infty} y / E_M \\
& \sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM}M_{nM} + b_{nM}N_{nM} + c_{nM}O_{nM} + d_{nM}P_{nM}) \\
& + a_{nI}M_{nI} + b_{nI}N_{nI} + c_{nI}O_{nI} + d_{nI}P_{nI}) \\
& = -2(1 + \nu_M) \tau_{xy}^{\infty} x / E_M \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{nM} &= -(1/2)t_n(\theta) \cos^2 \theta_o \tan \theta \\
& + \int_0^{2\pi} K_{nM}^{Fx}(\phi, \theta) t_n(\phi) b \sin \phi d\phi \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

表 1 せん断応力場の二つのだ円孔の境界に沿った未知関数の収束性 ($a/b=1$, $a/d=0.9$, $\tau_{xy}^{\infty}=1$)

θ (deg.)	M	ρ_{x2}	ρ_{y3}	ρ_{x4}	ρ_{y1}
0	16	20.237	6.8704	-16.442	-2.2282
	24	20.424	6.8917	-16.640	-2.2504
	32	20.551	6.9005	-16.715	-2.2578
	40	20.578	6.9060	-16.767	-2.2618
	48	20.579	6.9060	-16.768	-2.2618
20	16	12.278	5.4709	-9.0666	-0.7843
	24	12.299	5.4763	-9.0822	-0.7917
	32	12.303	5.4755	-9.0857	-0.7909
	40	12.303	5.4755	-9.0856	-0.7909
	48	12.303	5.4755	-9.0855	-0.7909
40	16	6.4491	4.1311	-3.4638	0.4421
	24	6.4526	4.1375	-3.4631	0.4380
	32	6.4523	4.1373	-3.4626	0.4382
	40	6.4524	4.1372	-3.4626	0.4383
	48	6.4524	4.1372	-3.4627	0.4384
60	16	4.6950	3.6975	-1.6307	0.6619
	24	4.6900	3.7048	-1.6220	0.6627
	32	4.6901	3.7051	-1.6220	0.6624
	40	4.6902	3.7051	-1.6221	0.6624
	48	4.6902	3.7050	-1.6221	0.6625
80	16	4.2366	3.6276	-1.1002	0.6078
	24	4.2289	3.6361	-1.0884	0.6114
	32	4.2290	3.6356	-1.0890	0.6116
	40	4.2289	3.6357	-1.0891	0.6116
	48	4.2289	3.6357	-1.0891	0.6116
90	16	4.1768	3.5675	-1.0608	0.6038
	24	4.1851	3.6313	-1.0387	0.6001
	32	4.1852	3.6332	-1.0364	0.5999
	40	4.1852	3.6329	-1.0359	0.5999
	48	4.1852	3.6327	-1.0359	0.5999



任意の点の応力は係数 a_{nM} , b_{nM} , c_{nM} , d_{nM} , a_{nI} , b_{nI} , c_{nI} , d_{nI} と $A_{nM} \sim P_{nI}$ に相当する影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法によりだ円形介在物の干渉効果を形状比と弾性比を系統的に変化させて解析する。

表 2 せん断応力場の二つのだ円孔の境界に沿った応力の収束性 ($a/b=1$, $a/d=0.9$, $\tau_{xy}^{\infty}=1$)

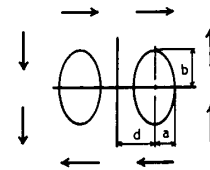
θ (deg.)	M	σ_t	σ_n	τ_{nt}
40	16	-4.5587	-2.2×10^{-5}	-3.3×10^{-4}
	24	-4.5626	1.5×10^{-6}	1.9×10^{-6}
	32	-4.5627	6.9×10^{-6}	-9.1×10^{-6}
	40	-4.5627	2.2×10^{-6}	-5.7×10^{-6}
	48	-4.5627	4.9×10^{-7}	-1.7×10^{-7}
80	16	-2.7643	1.0×10^{-3}	2.7×10^{-3}
	24	-2.7675	3.9×10^{-5}	2.0×10^{-5}
	32	-2.7676	-1.0×10^{-6}	1.2×10^{-5}
	40	-2.7676	-2.9×10^{-6}	5.6×10^{-6}
	48	-2.7576	7.6×10^{-7}	-1.8×10^{-6}
90	16	-1.6283	-1.5×10^{-3}	-3.1×10^{-3}
	24	-1.6272	-9.6×10^{-5}	-3.2×10^{-5}
	32	-1.6272	-1.4×10^{-5}	1.9×10^{-5}
	40	-1.6272	-3.9×10^{-6}	8.9×10^{-6}
	48	-1.6272	-1.5×10^{-6}	4.2×10^{-6}
120	16	1.5923	-1.8×10^{-3}	1.7×10^{-3}
	24	1.5958	-1.7×10^{-4}	4.4×10^{-5}
	32	1.5959	8.6×10^{-6}	-2.3×10^{-5}
	40	1.5959	1.9×10^{-6}	-9.2×10^{-6}
	48	1.5959	-1.4×10^{-6}	8.3×10^{-6}
159.6	16	4.8794	-6.1×10^{-3}	3.7×10^{-4}
	24	4.8842	1.9×10^{-4}	-6.6×10^{-4}
	32	4.8863	-8.2×10^{-6}	1.3×10^{-5}
	40	4.8858	-2.9×10^{-7}	-1.3×10^{-5}
	48	4.8859	1.3×10^{-7}	-1.0×10^{-6}
160	16	4.8791	-5.6×10^{-3}	4.6×10^{-4}
	24	4.8828	1.5×10^{-4}	-5.3×10^{-4}
	32	4.8853	2.5×10^{-6}	-3.3×10^{-5}
	40	4.8847	-4.8×10^{-7}	-2.2×10^{-5}
	48	4.8848	3.5×10^{-7}	-2.9×10^{-6}

表 3 最大応力とその発生位置 ($a/b=1$, $\tau_{xy}^{\infty}=1$)

a/d	Present analysis		Barrett [9]
	θ (deg.)	σ_t max	σ_t max
0	135	4.0000	4.00
0.1	135.0	4.0213	
1/6	135.2	4.0607	4.06
0.2	135.3	4.0883	4.08
1/4	135.6	4.1394	4.13
0.3	136.0	4.2014	4.20
1/3	136.5	4.2485	4.25
0.4	137.5	4.3549	4.35
0.5	140.0	4.5419	4.51
0.6	143.9	4.7615	4.78
2/3	147.3	4.9292	5.00
0.7	149.2	5.0189	5.08
0.8	154.9	5.2476	5.55
0.82	156.0	5.2605	5.76
0.84	157.0	5.2466	5.92
0.86	158.0	5.1923	6.11
0.88	158.9	5.0795	6.38
0.9	159.6	4.8859	6.50
0.92	160.0	4.5804	6.61

表 4 最大応力とその発生位置

a/d	0		1/3		1/2		2/3	
b/a	(deg.)	K_{t0}	(deg.)	K_t	(deg.)	K_t	(deg.)	K_t
1	135.0	4.000	136.4	4.248	140.0	4.542	147.3	4.929
2	116.6	4.500	119.7	4.665	125.6	4.397	138.7	3.831
4	104.0	6.250	107.6	5.413	111.0	4.150	111.8	3.166
8	97.1	10.125	100.3	6.173	101.4	4.837	101.9	4.195

表 5 境界に沿った未知関数の収束性 ($a/b=1$, $a/d=1/3$, $\tau_{xy}^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

(a) 母材

θ (deg.)	M	ρ_{x2M}	ρ_{y3M}	ρ_{x4M}	ρ_{y1M}
0	4	0.7180	-0.7373	-0.0066	-0.0001
	8	0.7180	-0.7373	-0.0066	-0.0005
	12	0.7180	-0.7373	-0.0066	-0.0005
20	4	0.7154	-0.7358	-0.0066	0.0040
	8	0.7155	-0.7354	-0.0076	0.0039
	12	0.7155	-0.7354	-0.0076	0.0039
40	4	0.7141	-0.7351	-0.0065	0.0062
	8	0.7140	-0.7343	-0.0082	0.0067
	12	0.7140	-0.7343	-0.0082	0.0067
60	4	0.7145	-0.7353	-0.0065	0.0054
	8	0.7145	-0.7347	-0.0080	0.0057
	12	0.7145	-0.7347	-0.0080	0.0057
80	4	0.7166	-0.7365	-0.0066	0.0021
	8	0.7167	-0.7363	-0.0071	0.0017
	12	0.7167	-0.7363	-0.0071	0.0017
90	4	0.7179	-0.7373	-0.0066	0.0000
	8	0.7180	-0.7373	-0.0066	-0.0005
	12	0.7180	-0.7373	-0.0066	-0.0005

(b) 介在物

θ (deg.)	M	ρ_{x2I}	ρ_{y3I}	ρ_{x4I}	ρ_{y1I}
0	4	1.2053	-1.1557	0.0086	-0.0683
	8	1.2047	-1.1553	0.0085	-0.0669
	12	1.2047	-1.1553	0.0085	-0.0669
20	4	1.2125	-1.1583	0.0105	-0.0824
	8	1.2123	-1.1581	0.0101	-0.0821
	12	1.2123	-1.1581	0.0101	-0.0821
40	4	1.2164	-1.1595	0.0116	-0.0898
	8	1.2169	-1.1598	0.0110	-0.0913
	12	1.2169	-1.1598	0.0110	-0.0913
60	4	1.2150	-1.1590	0.0112	-0.0872
	8	1.2153	-1.1592	0.0107	-0.0880
	12	1.2153	-1.1592	0.0107	-0.0880
80	4	1.2091	-1.1570	0.0097	-0.0758
	8	1.2087	-1.1567	0.0093	-0.0747
	12	1.2087	-1.1567	0.0093	-0.0747
90	4	1.2053	-1.1557	0.0087	-0.0683
	8	1.2047	-1.1553	0.0085	-0.0669
	12	1.2047	-1.1553	0.0085	-0.0669

表 6 境界に沿った応力の収束性 ($a/b=1$, $a/d=1/3$, $\tau_{xy}^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

θ (deg.)	M	σ_{tM}	σ_{tI}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{ntM}	τ_{ntI}
0	4	-0.0385	-0.0202	-0.0055	-0.0052	0.7258	0.7264
	8	-0.0388	-0.0206	-0.0057	-0.0057	0.7257	0.7257
	12	-0.0388	-0.0206	-0.0057	-0.0057	0.7257	0.7257
40	4	-1.7520	-0.7271	0.6962	0.6954	0.1244	0.1243
	8	-1.7514	-0.7265	0.6964	0.6964	0.1245	0.1245
	12	-1.7514	-0.7265	0.6964	0.6964	0.1245	0.1245
80	4	-0.6152	-0.2563	0.2381	0.2378	-0.6864	-0.6863
	8	-0.6148	-0.2564	0.2382	0.2382	-0.6865	-0.6865
	12	-0.6148	-0.2564	0.2382	0.2382	-0.6865	-0.6865
86	4	-0.2545	-0.1080	0.0894	0.0892	-0.7228	-0.7227
	8	-0.2542	-0.1079	0.0896	0.0896	-0.7229	-0.7229
	12	-0.2542	-0.1079	0.0896	0.0896	-0.7229	-0.7229
90	4	-0.0073	-0.0064	-0.0125	-0.0127	-0.7295	-0.7293
	8	-0.0070	-0.0061	-0.0123	-0.0123	-0.7296	-0.7296
	12	-0.0070	-0.0061	-0.0123	-0.0123	-0.7296	-0.7296
94	4	0.2399	0.0952	-0.1143	-0.1145	-0.7219	-0.7217
	8	0.2401	0.0956	-0.1142	-0.1142	-0.7221	-0.7221
	12	0.2401	0.0956	-0.1142	-0.1142	-0.7221	-0.7221
100	4	0.5998	0.2430	-0.2625	-0.2627	-0.6842	-0.6840
	8	0.5998	0.2436	-0.2625	-0.2625	-0.6843	-0.6843
	12	0.5998	0.2436	-0.2625	-0.2625	-0.6843	-0.6843
134.2	4	1.7539	0.7184	-0.7394	-0.7392	-0.0148	-0.0153
	8	1.7537	0.7184	-0.7394	-0.7394	-0.0146	-0.0146
	12	1.7537	0.7184	-0.7394	-0.7394	-0.0146	-0.0146
140	4	1.7236	0.7063	-0.7275	-0.7274	0.1322	0.1318
	8	1.7237	0.7060	-0.7274	-0.7274	0.1325	0.1325
	12	1.7237	0.7060	-0.7274	-0.7274	0.1325	0.1325
180	4	-0.0323	-0.0176	-0.0080	-0.0077	0.7258	0.7264
	8	-0.0326	-0.0181	-0.0082	-0.0082	0.7257	0.7257
	12	-0.0326	-0.0181	-0.0082	-0.0082	0.7257	0.7257

表 7 境界条件の満足度 ($a/b=1$, $a/d=1/3$, $\tau_{xy}^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

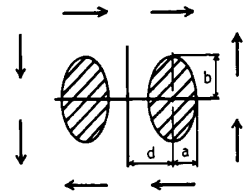
θ (deg.)	M	$\sigma_{nM}-\sigma_{nI}$	$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}$	U_M-U_I	V_M-V_I
40	4	7.7×10^{-4}	9.2×10^{-5}	-1.0×10^{-3}	-1.8×10^{-5}
	8	1.2×10^{-6}	1.5×10^{-7}	-9.2×10^{-7}	-1.9×10^{-8}
	12	1.1×10^{-9}	1.4×10^{-10}	-5.8×10^{-10}	-1.3×10^{-11}
80	4	2.1×10^{-4}	-7.9×10^{-5}	4.3×10^{-4}	4.5×10^{-5}
	8	-9.6×10^{-8}	3.2×10^{-11}	-1.1×10^{-7}	-1.4×10^{-8}
	12	-4.0×10^{-10}	1.2×10^{-11}	-3.0×10^{-10}	-4.4×10^{-11}
90	4	2.8×10^{-4}	-1.5×10^{-4}	5.8×10^{-4}	7.5×10^{-5}
	8	-5.7×10^{-7}	2.7×10^{-7}	-6.3×10^{-7}	-1.0×10^{-7}
	12	8.2×10^{-10}	-3.6×10^{-10}	6.2×10^{-10}	1.1×10^{-10}
100	4	2.1×10^{-4}	-1.5×10^{-4}	4.6×10^{-4}	6.9×10^{-5}
	8	-1.0×10^{-8}	6.4×10^{-8}	-1.1×10^{-7}	-2.2×10^{-8}
	12	-4.2×10^{-10}	2.5×10^{-10}	-3.2×10^{-10}	-6.7×10^{-11}
134.2	4	-1.8×10^{-4}	4.2×10^{-4}	-7.2×10^{-4}	-1.3×10^{-4}
	8	-3.9×10^{-7}	8.3×10^{-7}	-7.8×10^{-7}	-1.8×10^{-7}
	12	-5.8×10^{-10}	1.2×10^{-9}	-7.5×10^{-10}	-1.9×10^{-10}
140	4	-1.3×10^{-4}	4.3×10^{-4}	-7.0×10^{-4}	-1.3×10^{-4}
	8	-2.5×10^{-7}	7.0×10^{-7}	-6.2×10^{-7}	-1.5×10^{-7}
	12	-2.4×10^{-10}	6.5×10^{-10}	-4.0×10^{-10}	-1.0×10^{-10}

3. 解析結果および考察

3・1 無限板中の二つのだ円孔 せん断応力場における無限板中の二つのだ円孔の干渉問題において、形状比が $a/b=1$, $a/d=0.9$, $\tau_{xy}^\infty=1$ の場合、円孔縁に沿った未知関数の ρ_{x2} , ρ_{y3} , ρ_{x4} , ρ_{y1} の収束状況を表 1

表 8 無限板中のだ円形介在物の最大応力とその発生位置 ($\tau_{xy}^\infty=1$, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

E_I/E_M	a/b	Matrix								Inclusion							
		0		1/3		1/2		2/3		0		1/3		1/2		2/3	
		(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$	(deg.)	$\sigma_{\max}$
0.0	1	135.0	4.000	136.4	4.248	140.0	4.542	147.3	4.929	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1/2	116.6	4.500	119.7	4.665	125.6	4.397	138.7	3.831	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1/4	104.0	6.250	107.6	5.413	110.0	4.150	111.8	3.166	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1/8	97.1	10.125	100.3	6.173	101.4	4.937	101.9	4.195	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	1	135.0	2.765	134.4	2.655	133.6	2.583	133.0	2.548	0°~180°	0.412	45.0	0.391	45.0	0.372	45.0	0.351
	1/2	116.6	3.381	115.5	3.188	115.0	3.162	114.9	3.184	0°~180°	0.597	129.4	0.552	137.3	0.538	140.6	0.537
	1/4	104.0	3.702	103.5	3.574	103.5	3.294	103.6	3.580	0°~180°	0.752	129.1	0.707	128.6	0.712	128.3	0.718
	1/8	97.1	4.269	96.9	4.226	96.0	4.298	96.0	4.325	0°~180°	0.859	134.9	0.844	133.6	0.864	132.8	0.884
0.5	1	135.0	1.789	134.7	1.754	134.2	1.729	133.9	1.715	0°~180°	0.417	45.0	0.719	45.3	0.706	125.1	0.695
	1/2	116.6	1.972	116.3	1.925	116.1	1.923	116.0	1.939	0°~180°	0.859	129.7	0.833	138.2	0.829	142.0	0.834
	1/4	104.0	2.067	103.8	2.044	103.8	2.041	103.9	2.093	0°~180°	0.933	126.1	0.925	124.6	0.929	122.0	0.945
	1/8	97.1	2.104	97.1	2.079	97.1	2.099	97.1	2.116	0°~180°	0.969	133.0	0.973	132.8	0.986	132.5	0.987
0.8	1	135.0	1.246	134.8	1.237	134.7	1.230	134.6	1.227	0°~180°	0.918	45.0	0.911	45.0	0.906	126.0	0.902
	1/2	116.6	1.294	116.2	1.284	116.5	1.285	116.5	1.288	0°~180°	0.961	130.5	1.953	138.5	0.952	142.9	0.956
	1/4	104.0	1.317	103.9	1.309	104.0	1.315	104.0	1.324	0°~180°	0.985	140.9	0.980	142.1	0.984	144.5	0.987
	1/8	97.1	1.325	97.1	1.279	97.1	1.284	97.1	1.291	0°~180°	0.993	132.8	0.994	132.8	0.997	132.7	0.998
1.25	1	74.4	1.118	74.4	1.130	74.4	1.130	74.3	1.137	0°~180°	1.077	45.0	1.090	45.0	1.111	45.0	1.147
	1/2	93.8	1.075	93.5	1.085	92.9	1.089	92.3	1.091	0°~180°	1.075	45.0	1.044	45.0	1.053	45.0	1.062
	1/4	111.5	1.056	111.3	1.060	110.5	1.037	109.4	1.053	0°~180°	1.010	45.0	1.028	45.0	1.035	45.0	1.039
	1/8	122.8	1.049	120.1	1.044	123.5	1.044	122.1	1.045	0°~180°	1.002	45.0	1.017	45.0	1.017	45.0	1.016
2.0	1	73.3	1.343	73.3	1.364	73.3	1.383	73.3	1.403	0°~180°	1.217	45.0	1.259	45.0	1.331	45.0	1.279
	1/2	92.2	1.229	92.9	1.257	92.5	1.268	91.5	1.272	0°~180°	1.083	45.0	1.118	45.0	1.145	45.0	1.172
	1/4	111.3	1.191	111.2	1.201	110.8	1.119	109.8	1.174	0°~180°	1.019	45.0	1.072	45.0	1.096	45.0	1.105
	1/8	122.7	1.195	120.1	1.181	121.6	1.170	123.0	1.169	0°~180°	1.008	45.0	1.043	45.0	1.041	45.0	1.034
5.0	1	71.9	1.657	72.0	1.700	72.1	1.740	72.3	1.785	0°~180°	1.400	45.0	1.490	45.0	1.553	45.0	1.966
	1/2	92.2	1.474	92.0	1.530	91.9	1.553	91.5	1.557	0°~180°	1.135	45.0	1.199	45.0	1.249	45.0	1.298
	1/4	110.7	1.485	110.6	1.498	110.2	1.457	109.4	1.428	0°~180°	1.090	45.0	1.116	45.0	1.162	45.0	1.178
	1/8	122.3	1.621	122.2	1.541	122.1	1.522	121.9	1.513	0°~180°	1.017	45.0	1.070	45.0	1.056	45.0	1.035
∞	1	70.7	1.940	70.8	2.007	71.0	2.070	70.4	1.904	0°~180°	1.555	72.0	1.618	72.0	1.773	70.8	1.525
	1/2	90.1	1.740	89.4	1.706	89.4	1.704	89.4	1.703	0°~180°	1.117	45.0	1.254	45.0	1.357	45.0	1.101
	1/4	109.1	1.945	108.3	1.886	108.4	1.880	108.4	2.188	0°~180°	1.010	45.0	1.116	45.0	1.263	45.0	1.117
	1/8	121.5	2.659	121.5	2.535	121.5	2.534	120.5	2.519	0°~180°	1.001	45.0	1.013	45.0	1.068	45.0	1.129



に示す。式(4)に含まれる4種類の基本密度関数を用いた本解析結果は選点数 $M=40$ 程度で有効数字5けた程度まで収束している。このような良好な収束性を示すことから、連続関数である密度分布を式(10)の表現によりうまく近似できているものと考えられる。

次に、形状比が $a/b=1$, $a/d=0.9$, $\tau_{xy}^\infty=1$ の場合、円孔縁における応力 σ_t , σ_n , τ_{nt} の分布を表2に示す。本解析結果では、境界上で零であるべき σ_n , τ_{nt} の値は、円孔縁全周において $M=24$ 程度で 10^{-4} 以下であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。また、 σ_t の値は、 $M=32$ で有効数字4けた収束している。

次に、 $a/b=1$, $\tau_{xy}^\infty=1$ の場合、 a/d を変化させたときの最大応力 $\sigma_{t\max}$ を Barrett らの解析結果の図からの読取り値⁽⁹⁾ とともに表3に示す。表3中の θ の値は最大応力の発生位置である。Barrett らの結果は、 a/d が小さいとき本解析結果とよく一致しているが、 a/d が大きくなるにつれて差が生じている。 a/d を変化させるとき $a/d=0.82$ 付近で干渉による応力が最大となることがわかる。

さらに、介在物の大きさが $a/d=1/3$, $1/2$, $2/3$, $\tau_{xy}^\infty=1$ の場合、形状比 b/a を変化させたとき、応力集中係数 K_t の収束値をその発生位置とともに表4に示す。 K_{t0} が無限板中に一つの円孔がある場合の応力集中係数である。表4で $b/a=2$ のときに注目すると円孔の場合(表3)と同様に a/d がある中間値で干渉による応力が最大値をとることが円孔の場合にも認められる。応力集中係数の値は有効数字4けた収束して

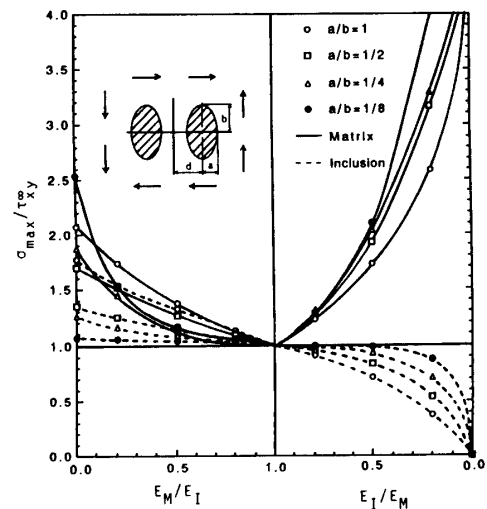


図2 弾性係数の比と最大応力(発生位置は表8) ($a/d=1/2$, $\tau_{xy}^\infty=1$, $\nu_I=\nu_M=0.3$)

いて、形状比 a/b と a/d の広範囲で本解析法が有効であることが確認された。

3・2 無限板中の二つのだ円形介在物 本論文では平面ひずみとして解析を行った。図1の無限板中の2個のだ円形介在物の干渉問題において、形状比が $a/b=1$, $a/d=1/3$, $\tau_{xy}^\infty=1$, $E_I/E_M=0.5$, $\nu_I=\nu_M=0.3$ の場合、未知関数 ρ_{x2M} , ρ_{y3M} , ρ_{x4M} , ρ_{y1M} , ρ_{x2I} , ρ_{y3I} , ρ_{x4I} , ρ_{y1I} の収束状況を表5に示す。 w_{x2} , w_{x4} , w_{y3} , w_{y1} の基本密度関数を用いた本解析結果は、 $M=8$ 程度で有効数字5けた程度まで収束している。このような、良好な収束性を示すことから、連続関数である密度分

布をうまく近似できているものと考えられる。

次に、形状比が $a/b=1$, $a/d=1/3$, $\tau_{xy}^{\infty}=1$, $E_I/E_M=0.5$, $\nu_I=\nu_M=0.3$ の場合、境界縁に沿った応力 σ_{IM} , σ_{NM} , τ_{nIM} , σ_{II} , σ_{NI} , τ_{nII} の収束状況を表 6 に示す。本解析結果は、 $M=8$ 程度で有効数字 5 けた程度まで収束していて良好な収束性を示す。さらに、境界条件 ($\sigma_{NM}-\sigma_{NI}=0$, $\tau_{nIM}-\tau_{nII}=0$, $U_M-U_I=0$, $V_M-V_I=0$) の満足度を確かめるために、それらの値を表 7 に示す。境界上で零であるべき、 $\sigma_{NM}-\sigma_{NI}$ 等の値は境界全周で $M=8$ 程度でも 10^{-6} 程度であり高い境界条件の満足度が確かめられた。

最後に、介在物の大きさが $a/d=1/3, 1/2, 2/3$, $\tau_{xy}^{\infty}=1$ の場合、 a/b を変化させたときの母材と介在物の最大応力の値とその発生位置を表 8 に示す。最大応力の値は、有効数字 4 けた程度まで収束していて、 a/b および a/d の広範囲で本解析法が有効であることがわかった。また、図 2 は、 $a/d=0.5$ の場合をプロットしたものである。

4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を利用して、従来体積力法による解析がなされていない、せん断応

力場における穴などの干渉問題を厳密に解析する方法を示した。具体的問題として、無限板中の二つのだ円孔および、だ円形介在物の干渉効果を考察した。特異積分方程式の数値解析には前報で提案した、未知関数を 8 種類の基本密度関数と多項式の積で近似する解析方法を用いた。母材と介在物境界の応力分布を調べた結果、高い境界条件の満足度が得られることが明らかになった。解析結果の精度は、前報の引張応力を受ける介在物の問題と同程度であり、このような解析方法がせん断応力場の問題にも有効であることが確かめられた。

文 献

- (1) 西谷, 機誌, **71**-589(1968), 209.
- (2) 西谷, 機誌, **70**-580(1967), 627.
- (3) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (4) 野田・松尾, 機論, **58**-555, A(1992), 2179.
- (5) 野田・松尾, 機論, **59**-559, A(1993), 785.
- (6) 野田・松尾, 機論, **59**-564, A(1993), 1964.
- (7) 野田・松尾, 機論, **60**-571, A(1994), 798.
- (8) 野田・松尾, 機論, **60**-578, A(1994), 2411.
- (9) Barrett, R. F., Sheth, P. R. and Patel, G. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **93**(1971), 528.
- (10) 鶴戸口, 応用数学力学, **1**-1(1947), 14; **1**-2(1947), 61.